制御におけるスパース性の利用について

AUTHOR(S):

永原, 正章

制御におけるスパース性の利用について

On the Use of Sparsity for Control

永原正章 †
† 京都大学情報学研究科

Masaaki NAGAHARA†
†Graduate School of Informatics, Kyoto University

アブストラクト　本稿では，制御におけるスパース性の利用について考察する．すなわち，スパースな信号を用いた制御の利点とその導出法について考える．もし制御信号がスパースであれば，ある時間区間で制御信号が完全に 0 となるので，その区間でアクチュエータを休止させることができる．この性質により，制御データの伝送負荷を削減でき，また省エネが達成されるといった利点が生まれる．本稿では，これらの利点について概説した後，連続時間の L^0 ノルムを定義し，ある種の L^1 最適制御問題の解が最もスパースな許容解（L^0 最適解）でもあることを示す．

1　はじめに

信号処理において，スパース性の概念は近年重要な役割を果たしており，スパース性にもとづいた様々な信号処理法が提案されている [3], [4], [10]．特に，ℓ^0 ノルムで定義された評価関数を最小化する最適化問題が ℓ^1 最適化の解と一致する条件を導き，凸最適化の手法によりスパース解を導出する方法は，この分野での標準的な手法となっている．

これらスパース性を用いた信号処理の研究に触発されて，筆者らは近年，制御信号のスパース性を考慮した新しい制御手法を提案した [5], [6], [8]．これらの研究の背景には，制御の分野で近年盛んに研究されているネットワーク化制御がある．ネットワーク化制御においては，制御信号のデータが帯域制限のある通信路を介して制御対象に送信される．このとき，もし制御信号がスパース表現されていれば，送信信号のデータ量を効率的に圧縮し送信することが可能となる．このような観点から，安定性や収束性など制御系の性能をなるべく変化させず，かつ制御信号をできるだけスパースに表現するために，ℓ^1-ℓ^2 評価関数など解のスパース性を誘導する最適化により制御問題を定式化し，近年発展が著しいそれらの高速計算法（たとえば [2]）を導入して，スパースな制御を導出することを提案した．

本研究では，これらの研究をさらに発展させ，連続時間の制御信号のスパース化を提案する．ここで，連続時間の信号がスパースであるとは，その信号の台の長さが，全体の時間区間長に比べて十分短いことであると定義する．スパースな制御信号を用いれば，ある一定の時間区間で制御の値が厳密に 0 となり，その区間でアクチュエータを休止させることができる．たとえば自動車の場合，アクチュエータ（の一つ）はガソリンエンジンであるが，エンジンを止めることにより，ガソリンの消費を抑えるとともに，CO2 の排出や騒音も抑制することができる．この性質は，電気モータを含むハイブリッドカーにおいても有効である．すなわち，制御にスパース性を導入することにより，燃料消費量の削減だけでなく，環境問題の解決にも役立つと期待できる．

以下では，まず連続時間信号の L^0 ノルムを定義したのち，L^1 最適制御の L^0 最適性についての理論的結果を述べる．

2　連続時間信号の L^0 ノルム

時間区間 $[0,T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ にたいして，その L^0 ノルムをその台の長さ，すなわち

$$\|u\|_0 = \mu\big(\mathrm{supp}(u)\big) = \mu\big(\{t \in [0,T] : u(t) \neq 0\}\big), \quad (1)$$

で定義する．ここで，μ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度であり，$\mathrm{supp}(u)$ は連続時間信号 u の台を表す．なお，(1) で定義された $\|u\|_0$ は斉次性が成り立たないので，厳密にはノルムではない．すなわち，非零で $|a| \neq 1$ であるような任意のスカラー a に対して，

$$\|au\|_0 = \|u\|_0 \neq |a|\|u\|_0, \quad \forall u \neq 0 \quad (2)$$

となってしまう．しかし，ここでは慣例に従い L^0 ノルムという呼び方を用いる．また，(1) を “L^0” ノルムと呼ぶのは次の性質からである．すなわち，u を区間 $[0,T]$ 上で Lebesgue 可積分な信号としたとき，任意の $p \in (0,1)$ に対して $u \in L^p$ であり，かつ

$$\lim_{p\to 0} \|u\|_p^p = \|u\|_0 \quad (3)$$

が成り立つ [11]．ここで，

$$\|u\|_p = \left(\int_0^T |u(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} \tag{4}$$

であり，L^p は $\|u\|_p$ が有限な関数 u からなる集合である．

区間 $[0, T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ が**スパース**であるとは，区間幅 T に比べて $\|u\|_0$ が十分小さいことを言う．この定義は，圧縮センシング等で用いられるベクトルの ℓ^0 ノルムのアナロジーである．すなわち，ベクトルの ℓ^0 ノルムはその非ゼロ要素の数として定義され，スパースなベクトルとは，その ℓ^0 ノルムがベクトル長よりも十分小さいベクトルのことである．詳しくは [3], [4], [10] などを参照されたい．

3 L^1 最適制御の L^0 最適性

次の制御対象を考えよう．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t). \tag{5}$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$ とし，$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする．この制御対象に対し，初期値 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ から，終端値 $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{0}$ まで状態を遷移させる制御入力で，最大値制約

$$|u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, T] \tag{6}$$

を満たすものを**許容制御**と呼ぶ．この許容制御のうち，次の L^1 評価関数を最小化する制御入力 $u(t)$, $t \in [0, T]$ を求める L^1 最適制御問題を考える．

$$J(u) = \|u\|_1 = \int_0^T |u(t)| \mathrm{d}t. \tag{7}$$

この L^1 最適制御問題に対して，**正規性** (**normality**) [1] と呼ばれる性質と解の存在を仮定すれば，その解は最もスパースな許容解となることが示される．

定理 1 L^1 最適制御問題が正規であり，かつ最適解が存在すると仮定する．このとき，L^1 最適制御は最もスパースな許容制御である．すなわち，L^1 最適制御は次の L^0 評価関数

$$J_0(u) = \|u\|_0 \tag{8}$$

を最小化する．

この定理は，より一般的な制御対象に対して，最小原理 [9] を用いて証明される [7]．この定理により，L^1 最適制御問題が正規であり，かつその解が存在すれば，(8) の L^0 ノルムを最小化する最適制御が L^1 最適制御により与えられることになる．なお，正規性の十分条件として以下の条件が知られている [1, Theorem 6.13]．

補題 1 線形システム (5) が可制御で行列 A が正則なら，L^1 最適制御問題は正規となる．

L^1 最適制御問題は，区間 $[0, T]$ を十分短い区間に分割し離散化を行えば，ベクトルの凸最適化問題に帰着され，きわめて効率的に解くことが可能である．詳しくは [7] を参照されたい．

4 おわりに

本稿では，制御におけるスパース性の利用について概説し，特に，連続時間の L^0 ノルムを最小化する最適制御が，ある仮定のもとで L^1 最適制御により与えられることを示した．制御におけるスパース性の利用に関する研究は，近年始まったばかりであり，圧縮センシングの技法など，信号処理における多くの研究成果を制御に応用することで，より良い制御系設計が可能になると期待される．

謝辞

本研究は，科学研究費補助金，基盤研究 (C)(24560543) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control*, Dover Publications, 1966

[2] A. Beck and M. Teboulle, A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM J. Imaging Sci.*, Vol. 2, No. 1, pp. 183–202, 2009

[3] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed Sensing*, Cambridge University Press, 2012

[4] K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, A user's guide to compressed sensing for communications systems, *IEICE Trans. on Communications*, vol. E96-B, no. 3, pp. 685–712, Mar., 2013

[5] M. Nagahara and T. Matsuda and K. Hayashi Compressive sampling for remote control systems, *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol. E95-A, No. 4, pp. 713–722, Apr., 2012

[6] M. Nagahara and D. E. Quevedo, Sparse representations for packetized predictive networked control, *IFAC world congress*, pp. 84–89, Sept., 2011

[7] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and D. Nešić, Maximum hands-off control and L^1 optimality," *Proc. of 52nd IEEE CDC*, Dec., 2013

[8] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and J. Østergaard, Packetized predictive control for rate-limited networks via sparse representation, *Proc. of 51st IEEE CDC*, pp. 1362–1367, Dec., 2012

[9] 大塚，非線形最適制御入門，コロナ社, 2011

[10] 田中，圧縮センシングの数理，*IEICE Fundamental Review*, Vol. 4, No. 1, pp. 39–47, Jul., 2010

[11] T. Tao, *An Epsilon of Room, I: Real Analysis*, AMS, Feb., 2011